RAPPELS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

G.BERHUY

Avertissement ! ! Ce texte contient quelques rappels d'algèbre linéaire, dont le contenu équivaut (plus ou moins) à un cours de première et deuxième année. Il ne prétend aucunement se substituer à un cours complet, ni à des révisions sérieuses sur le sujet. Il n'y a ni démonstrations, ni exemples (ou très peu) et certains parties ont été omises, comme par exemple les considérations sur les polynômes, les méthodes de calcul d'inverses de matrices, la notion de matrice échelonnée, ou ce qui touche à la géométrie. Il n'y a pas non plus de rappels sur le groupe symétrique, nécessaires pour la notion de déterminant. Bref, il n'est pas parfait, mais il a le mérite d'exister, et d'être là pour rafraîchir la mémoire des lecteurs. L'auteur encourage les lecteurs à retravailler par eux-mêmes les points manquants ou à demander des éclaircissements ou approfondissements pendant les séances d'exercices.

Table des matières

1. Notions fondamentales

Définition 1.1. Soit K un corps. Un *K-espace vectoriel* est un ensemble E non vide muni d'une loi interne

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

et d'une loi externe

$$K \times E \longrightarrow E$$
$$(\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(1) pour tous $x, y, z \in E$, on a $(x + y) + z = x + (y + z)$

(2) pour tous $x, y \in E$, $x + y = y + x$

(3) Il existe $0_E \in E$ tel que, pour tout $x + 0_E (= 0_E + x) = x$. Cet élément 0_E est nécessairement unique, et est appelé le *vecteur nul* de E

(4) pour tout $x \in E$, il existe $x' \in E$ tel que $x + x' = (x' + x) = 0_E$. Un tel $x' \in E$ est nécessairement unique, et est noté $-x$. On l'appelle *l'opposé* de x. Par définition, $-x$ est donc l'unique élément de E vérifiant $x + (-x)(= (-x) + x) = 0_E$.

(5) Pour tout $x \in E$, $1_K \cdot x = x$

(6) Pour tous $\lambda, \mu \in K$, et tout $x \in E$, on a $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$

(7) Pour tous $\lambda, \mu \in K$, et tout $x \in E$, on a $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$

(8) Pour tout $\lambda \in K$, et tous $x, y \in E$, on a $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

On a alors les règles de calcul suivantes, valables dans tout K-espace vectoriel : pour tout $\lambda \in K$, et tous $x, y \in E$, on a

$$\lambda \cdot 0_E = 0_E,\ (-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x),\ -(-x) = x,\ (-x + -y) = -(x + y).$$

Un élément de E est appelé un *vecteur*.

Exemples 1.2.

(1) Pour tout $n \geq 1$, K^n, muni des lois d'addition et de multiplication par un scalaire coordonnée par coordonnée, est un K-espace vectoriel.

Le vecteur nul est $(0, \ldots, 0)$.

(2) Plus généralement, si $E_1, \ldots, E_r$ sont des K-espaces vectoriels, alors le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_r$, muni des lois d'addition et de multiplication par un scalaire coordonnée par coordonnée, est un K-espace vectoriel.

Le vecteur nul est $(0_{E_1}, \ldots, 0_{E_r})$.

(3) L'ensemble $\mathscr{F}(X, K)$ des fonctions d'un ensemble X vers K, muni de l'addition des fonctions, et de la multiplication des fonctions par un scalaire, est un K-espace vectoriel.

Le vecteur nul est la fonction nulle.

(4) L'ensemble des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans K, muni des lois d'addition et de multiplication par un scalaire terme à terme, est un K-espace vectoriel.

Le vecteur nul est la suite nulle.

Définition 1.3. Soit E un K-espace vectoriel. Un *sous-espace vectoriel* est un sous-ensemble $F \subset E$ vérifiant :

(1) $0_E \in F$;

(2) pour tous x, $y \in F$, on a $x + y \in F$;

(3) pour tout $\lambda \in K$, et pour tout $x \in F$, on a $\lambda \cdot x \in F$.

De manière équivalente, un sous-espace vectoriel est un sous-ensemble F non vide tel que pour tous x, $y \in F$ et tout $\lambda \in K$, on a $x + \lambda \cdot y \in F$.

Un sous-espace vectoriel F de E est alors un K-espace vectoriel pour les lois induites par celles de E.

Exemple 1.4. $\{0_E\}$ et E sont toujours des sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E.

On peut montrer aisément que l'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace vectoriel de E. On a alors la définition suivante.

Définition 1.5. Soit E un K-espace vectoriel, et soit S une partie de E. Le *sous-espace vectoriel engendré par* S est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant S ; c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant S. Il est noté $\mathrm{Vect}_K(S)$.

Proposition 1.6. *Soit E un K-espace vectoriel. Soient S, S_1, S_2 des parties de E. Alors :*

(1) $\mathrm{Vect}_K(\emptyset) = \{0_E\}$

(2) On a $\mathrm{Vect}_K(S) = S \iff S$ *est un sous-espace vectoriel de* E

(3) On a $S \subset \mathrm{Vect}_K(S)$ *et* $\mathrm{Vect}_K(S)$ *est un sous-espace vectoriel de* E

(4) Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a $S \subset F \Longrightarrow \mathrm{Vect}_K(S) \subset F$

(5) On a $S_1 \subset S_2 \Longrightarrow \mathrm{Vect}_K(S_1) \subset \mathrm{Vect}_K(S_2)$.

Remarque 1.7. Les propriétés (4) et (5) sont fondamentales, et permettent de se passer de beaucoup de calculs.

On a une description explicite du sous-espace vectoriel engendré par une partie.

Proposition 1.8. *Soit E un K-espace vectoriel, et soit S une partie (éventuellement vide) de E. Alors, on a*

$$\mathrm{Vect}_K(S) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i \mid n \geq 0,\ x_i \in S,\ \lambda_i \in K \Big\}.$$

Passons maintenant aux applications linéaires.

Définition 1.9. Soient E, F deux K-espaces vectoriels. Une *application linéaire* est une application $u : E \longrightarrow F$ telle que :

(1) pour tous x, $y \in E$, on a $u(x + y) = u(x) + u(y)$;

(2) pour tout $\lambda \in K$, et tout $x \in E$, on a $u(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot u(x)$.

De manière équivalente, $u : E \longrightarrow F$ est linéaire si pour tous x, $y \in E$, et tout $\lambda \in K$, on a

$$u(x + \lambda \cdot y) = u(x) + \lambda \cdot u(y).$$

Un *endomorphisme* de E est une application linéaire de E dans lui-même.

L'ensemble des applications linéaires de E vers F est un K-espace vectoriel pour les lois évidentes, noté $\mathscr{L}(E,F)$. Si $E=F$, on le note plus simplement $\mathscr{L}(E)$.

Un *isomorphisme* d'espaces vectoriels est une application linéaire bijective. Dans ce cas, on peut montrer que l'application inverse est aussi linéaire. Un *automorphisme* de E est un isomorphisme de E sur lui-même. L'ensemble des automorphismes de E est un groupe pour la composition des applications, noté $\mathrm{GL}(E)$, et appelé *groupe linéaire.*

Proposition 1.10. *Soit $u: E \longrightarrow F$ une application K-linéaire.*

(1) *Pour tout sous-espace vectoriel E' de E, $u(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.*

En particulier, $\mathrm{Im}(u) = f(E)$ *est un sous-espace vectoriel de F, appelé l'image de f.*

(2) *Pour tout sous-espace vectoriel F' de F, l'image réciproque $u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.*

En particulier, $\ker(u) = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\}$ *est un sous-espace vectoriel de E, appelé le noyau de f.*

Enfin :

- *f est surjective* $\iff \mathrm{Im}(f) = F$

- *f est injective* $\iff \ker(f) = \{0_E\}$

On rappelle maintenant la notion de K-algèbre.

Soit K un corps. Une K-*algèbre* est un K-espace vectoriel $\mathscr{A}$, muni d'une application K-bilinéaire

$$\begin{aligned}\mathscr{A} \times \mathscr{A} &\longrightarrow \mathscr{A}\\ (x,y) &\longmapsto xy,\end{aligned}$$

appelée *loi produit.* On dit que $\mathscr{A}$ est *associative* si le produit est associatif, et *unitaire* si le produit admet un élément neutre, que l'on note $1_{\mathscr{A}}$.

Un *morphisme* de K-algèbres $f: \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ est une application K-linéaire vérifiant

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad \text{pour tous } x,y \in \mathscr{A}.$$

Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont unitaires, on impose la condition supplémentaire

$$f(1_{\mathscr{A}}) = 1_{\mathscr{B}}.$$

On laisse le soin au lecteur de définir la notion d'endomorphisme, d'isomorphisme ou d'automorphisme de K-algèbres.

Enfin, une *sous-algèbre* de $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ qui est stable par produit. Si $\mathscr{A}$ est unitaire, on demande aussi que $1_{\mathscr{A}} \in \mathscr{B}$.

Exemples 1.11. (1) E est un K-espace vectoriel, alors le K-espace vectoriel $\mathscr{L}(E)$ est une K-algèbre associative unitaire pour la composition.

(2) Pour tout ensemble non vide Ω, $\mathscr{F}(\Omega,K)$ est une K-algèbre associative unitaire pour le produit des fonctions.

(3) L'anneau des polynômes $K[X]$ est une K-algèbre associative unitaire pour le produit des polynômes.

(4) Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, muni du produit vectoriel, est une $\mathbb{R}$-algèbre non associative, et non unitaire.

(5) Une sous-algèbre d'une K-algèbre (associative unitaire) $\mathscr{A}$ est aussi une K-algèbre (associative unitaire) pour les lois induites par celles de la K-algèbre $\mathscr{A}$.

Dans la suite, s'il n'y a pas d'ambiguïté, nous écrirons « λx » à la place de « $\lambda \cdot x$ », lorsque $\lambda \in K$ et x est un élément d'un K-espace vectoriel.

2. Familles libres, génératrices, bases

Définition 2.1. Soit E un K-espace vectoriel. Une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est *libre* si pour tout sous-ensemble $J \subset I$ **fini**, et pour toute famille $(\lambda_j)_{j\in J}$ d'éléments de K, on a

$$\sum_{j\in J} \lambda_j e_j = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_j = 0, \quad \text{pour tout } j \in J.$$

De manière équivalente, $(e_i)_{i\in I}$ est libre si pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de K presque tous nuls, on a

$$\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_i = 0, \quad \text{pour tout } i \in I.$$

Une famille qui n'est pas libre est dite *liée*.

On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une famille *génératrice* si le sous-espace vectoriel engendré par ses éléments est E tout entier, ou autrement dit, si pour tout élément $x \in E$, il existe un sous-ensemble $J \subset I$ **fini** et une famille $(\lambda_j)_{j\in J}$ d'éléments de K tels que

$$x = \sum_{j\in J} \lambda_j e_j.$$

Autrement dit, $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice si tout $x \in E$ s'écrit sous la forme

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i,$$

où les λ_i sont presque tous nuls.

On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une *base* de E si elle est à la fois libre et génératrice. Cela revient à dire tout $x \in E$ peut s'écrire de manière **unique** sous la forme

$$x = \sum_{j\in J} \lambda_j e_j,$$

où J est un sous-ensemble fini de I, ou encore si tout $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i,$$

où les $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de K presque tous nuls.

On dit qu'un K-espace vectoriel est *de type fini* s'il possède au moins une famille génératrice finie.

On a alors :

Théorème 2.2 (complétion/extraction)**.** *Soit E un K-espace vectoriel de type fini, et soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie.*

Alors, toute famille libre de E contenue dans $\mathscr{G}$ peut être complétée en une base de E formée d'éléments de $\mathscr{G}$.

En particulier :

- toute famille libre de E peut être complétée en une base de E

- de toute famille génératrice finie, on peut extraire une base de E

- tout K-espace vectoriel de type fini admet au moins une base.

Remarque 2.3. L'espace vectoriel nul admet une base, à savoir la base vide.

On a aussi le résultat suivant.

Si X est un ensemble, on note $|X|$ son nombre d'éléments (éventuellement infini).

Théorème 2.4. *Soit E un K-espace vectoriel. Supposons que E admette une famille génératrice finie. Alors, toutes les bases de E sont finies, et ont le même nombre d'éléments, disons n. De plus, pour toute famille libre $\mathscr{L}$, et toute famille génératrice finie $\mathscr{G}$, on a*

$$|\mathscr{L}| \leq n \leq |\mathscr{G}|.$$

Définition 2.5. Si E est de type fini, la *dimension* de E est le cardinal de n'importe quelle base de E. Elle est notée $\dim_K(E)$.

Théorème 2.6. *Soient $E, E_1, \ldots, E_n, F$ des K-espaces vectoriels de dimension finie. Alors :*

(1) *on a $\dim_K(K^n) = n$, pour tout $n \geq 1$;*

(2) *si $\dim_K(E) = n$, alors $E \simeq K^n$;*

(3) *deux K-espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si, et seulement si, ils ont même dimension ;*

(4) *pour tout sous-espace vectoriel E' de E, E' est de dimension finie, et l'on a*

$$\dim_K(E') \leq \dim_K(E).$$

De plus, on a égalité si, et seulement si, $E' = E$;

(5) *le K-espace vectoriel $E_1 \times \cdots \times E_n$ est de dimension finie, et l'on a*

$$\dim_K(E_1 \times \cdots \times E_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim_K(E_i)$$

(6) *le K-espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$ est de dimension finie, et l'on a*

$$\dim_K\big(\mathscr{L}(E,F)\big) = \dim_K(E)\dim_K(F) \ ;$$

Définition 2.7. Si $u : E \longrightarrow F$ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie, *le rang* de u est la dimension de $\mathrm{Im}(u)$.

On a alors le théorème du rang :

Théorème 2.8. *Soient E, F deux K-espaces vectoriels de dimension finie. pour tout $u \in \mathscr{L}(E,F)$, on a*

$$\dim_K(E) = \dim_K\big(\ker(u)\big) + \dim_K\big(\mathrm{Im}(u)\big).$$

Corollaire 2.9. *Soient E, F deux K-espaces vectoriels de dimension finie. On suppose que $\dim_K(E) = \dim_K(F)$. Alors, pour tout $u \in \mathscr{L}(E,F)$ les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *l'application u est injective ;*

(2) *l'application u est surjective ;*

(3) *l'application u est bijective.*

Corollaire 2.10. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension n, et soit* $\mathbf{e}$ *une famille de n éléments de E. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *la famille* $\mathbf{e}$ *est libre ;*

(2) *la famille* $\mathbf{e}$ *est génératrice ;*

(3) *la famille* $\mathbf{e}$ *est une base de E.*

On rappelle enfin un résultat fondamental concernant les applications linéaires.

Proposition 2.11. *Soient E et F deux K-espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors, pour toute famille $(y_1, \ldots, y_n)$ d'éléments de F, il existe une unique application linéaire $u : E \longrightarrow F$ telle que*

$$u(e_i) = y_i, \quad \textit{pour tout } i = 1, \ldots, n.$$

Elle est donnée par

$$f(\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda y_i,$$

pour tous $\lambda_i \in K$.

3. Somme directe de deux sous-espaces, projections

Définition 3.1. Soit E un K-espace vectoriel, et soient $F_1, \ldots, F_r$ des sous-espaces de E. On note $\sum_{i=1}^{r} F_i$ l'ensemble

$$\sum_{i=1}^{r} F_i = \{\sum_{i=1}^{r} x_{F_i} \mid x_{F_i} \in F_i, 1 \leq i \leq r\}.$$

C'est un sous-espace de E, appelé somme de $F_1, \ldots, F_r$ (On peut démontrer que c'est le sous-espace engendré par la réunion des F_i).

On dit que E est la **somme directe** de $F_1, \ldots, F_r$ si tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière **unique** sous la forme $x = \sum_{i=1}^{r} x_{F_i}$, avec $x_{F_i} \in F_i$ pour $1 \leq i \leq r$. On le note $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$.

Lorsque $r = 2$ (cas qui nous suffira la plupart du temps), on voit facilement que $E = F_1 \oplus F_2$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(1) $E = F_1 + F_2$

(2) $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

La condition (1) traduit l'existence d'une décomposition et la condition (2) traduit son unicité.

La condition (1) peut être difficile à vérifier en pratique. Lorsque E est de dimension finie et $r = 2$, on a un critère plus sympathique.

Proposition 3.2. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, et soient F_1, F_2 deux sous-espaces de E. Alors, $E = F_1 \oplus F_2$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(1) $\dim_K(E) = \dim_K(F_1) + \dim_K(F_2)$

(2) $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Le lemme suivant est très utile en algèbre linéaire.

Lemme 3.3. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, et soient $F_1, \ldots, F_r$ des sous-espaces de E. On suppose que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$.*

Pour $1 \leq i \leq r$, soit $\mathscr{B}_i$ une base de F_i. Alors, la famille $\mathscr{B}$ de vecteurs de E obtenue en accolant les vecteurs de $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_r$ est une base de E.

En particulier, $\dim_K(E) = \sum_{i=1}^{r} \dim_K(F_i)$.

On revient au cas $r = 2$, dans le cas où E est de dimension quelconque (pas nécessairement finie).

Définition 3.4. On suppose que l'on a une décomposition en somme directe $E = F_1 \oplus F_2$. La **projection sur F_1 parallèlement à F_2** est l'unique endomorphisme $p_{F_1/\!\!/F_2}$ tel que

$$p_{F_1/\!\!/F_2}(x) = x \ \text{ pour tout } x \in F_1 \ \text{ et } p_{F_1/\!\!/F_2}(x) = 0_E \ \text{ pour tout } x \in F_2.$$

Autrement dit, on a

$$p_{F_1/\!\!/F_2}(x_{F_1} + x_{F_2}) = x_{F_1} \ \text{ pour tout } x_{F_1} \in F_1 \ \text{ et tout } x_{F_2} \in F_2.$$

On remarque facilement que $\ker(p_{F_1/\!\!/F_2}) = F_2$ et $\mathrm{Im}(p_{F_1/\!\!/F_2}) = F_1$. De plus, $\mathrm{Id}_E - p_{F_1/\!\!/F_2} = p_{F_2/\!\!/F_1}$.

On a aussi $\ker(p_{F_1/\!\!/F_2}) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - p_{F_1/\!\!/F_2})$ et $\mathrm{Im}(p_{F_1/\!\!/F_2}) = \ker(\mathrm{Id}_E - p_{F_1/\!\!/F_2})$.

On a aussi une réciproque. Un **projecteur** de E est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$. C'est un bon exercice (très classique par ailleurs) de montrer que $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p)$, et que p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

4. Calcul matriciel

Définition 4.1. Si $m, n \geq 1$ sont deux entiers, une *matrice de taille* $m \times n$ *à coefficients dans* K est un tableau $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n}$ à m lignes et n colonnes, où chaque coefficient a_{ij} est un élément de K.

L'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans K est noté $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Si $m = n$, on le note simplement $\mathrm{M}_n(K)$. Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(K)$ est alors appelée une matrice *carrée de taille* n.

Si $A = (a_{ij})_{i,j}, B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, et $\lambda \in K$, on pose

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j} \text{ et } \lambda A = (\lambda a_{ij})_{i,j}.$$

Muni de ces deux lois, $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$ est un K-espace vectoriel. Le vecteur nul est ici la matrice nulle (remplie de 0).

Lemme 4.2. *Si $E_{ij} \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en position (i, j), qui vaut 1, la famille $(E_{ij})_{i,j}$ est une base de $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$. En particulier,*

$$\dim_K(\mathrm{M}_{m\times n}(K)) = mn.$$

Si $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{p\times q}(K)$ et $B = (b_{k\ell})_{k,\ell} \in \mathrm{M}_{q\times r}(K)$, on pose

$$AB = (\sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{k\ell})_{i,\ell} \in \mathrm{M}_{p\times r}(K).$$

Lemme 4.3. *Si A, A_1, A_2 sont de taille $p \times q$, B, B_1, B_2 sont de taille $q \times r$ et C est de taille $q \times s$, et si $\lambda \in K$ alors :*

(1) $(AB)C = A(BC)$

(2) $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B,\ A(B_1 + B_2) = A_1B_1 + AB_2$

(3) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Remarque importante. Soit $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Par définition, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne de K^n, et si $C_1, \ldots, C_n$ sont les colonnes de A, alors $AX = x_1C_1 + \cdots + x_nC_n$.

Définition 4.4. Si $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, sa *transposée* est la matrice $A^t = (a_{ji})_{j,i} \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$.

Lemme 4.5. *Pour tous $A, A_1, A_2 \in \mathrm{M}_{p\times q}(K)$, tout $B \in \mathrm{M}_{q\times r}(K)$, et tout $\lambda \in K$, on a :*

(1) $(\lambda A_1 + A_2)^t = \lambda A_1^t + A_2^t$

(2) $(A^t)^t = A$

(3) $(AB)^t = B^tA^t$.

Définition 4.6. Une matrice **carrée** de taille n $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$ est dite *triangulaire supérieure* si tous ses coefficients strictement en dessous de la diagonale sont nuls, i.e. $a_{ij} = 0$ pour tous $i > j$, et *triangulaire inférieure* si $a_{ij} = 0$ pour tout $i < j$. Elle est dite *diagonale* si tous ses coefficients en dehors de la diagonale sont nuls, i.e. si $a_{ij} = 0$ pour tous $i \neq j$.

On note $I_n \in \mathrm{M}_n(K)$ la matrice **diagonale** dont tous les coefficients diagonaux valent 1. Par exemple, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, on a alors $I_m A = A = AI_n$.

Le K-espace vectoriel $\mathrm{M}_n(K)$, muni du produit, est alors une K-algèbre associative unitaire. Elle n'est **PAS** commutative dès que $n \geq 2$.

Définition 4.7. Une matrice $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ est *écrite par blocs* (ou *partitionnée*) si on a partitionné les lignes et les colonnes de A en rajoutant des traits horizontaux et verticaux.

Autrement, une matrice par blocs est une matrice écrite sous la forme $A = (A_{i,j})_{1\leq i\leq r, 1\leq j\leq s}$, où les blocs $A_{i,1}, \ldots, A_{i,s}$ ont même nombre de lignes et les blocs $A_{1,j}, \ldots, A_{r,j}$ ont même nombre de colonnes.

On dit alors que A est dite *triangulaire supérieure par blocs* si $A_{i,j} = 0$ pour tous $i > j$ et si $A_{i,i}$ est carrée pour tout i.

Elle est dite *triangulaire inférieure par blocs* si $A_{i,j} = 0$ pour tous $i < j$ et si $A_{i,i}$ est carrée pour tout i.

Enfin, elle est dite *diagonale par blocs* si $A_{i,j} = 0$ pour tous $i \neq j$ et $A_{i,i}$ est carrée pour tout i.

Attention ! 0n ne demande pas à ce que $A_{i,i}$ soit triangulaire/diagonale dans les définitions précédentes ! !

Remarque 4.8. Une matrice triangulaire/diagonale par blocs est nécessairement carrée. De plus, lorsque chaque bloc $A_{i,i}$ est de taille 1, on retrouve la notion classique de matrice triangulaire/diagonale.

Proposition 4.9 (Calcul par blocs)**.** *Soit $A = (A_{i,j})$ et $B = (B_{k,\ell})$ deux matrices par blocs. On suppose que pour tous i, k, ℓ, le nombre de colonnes de $A_{i,k}$ est égal au nombre de lignes de $B_{k,\ell}$.*

Alors, $AB = (\sum_k A_{i,k}B_{k,\ell})_{i,\ell}$.

Définition 4.10. Une matrice $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ est dite *inversible* s'il existe $A' \in M_{n\times m}(K)$ telle que $AA' = I_n$ et $A'A = I_m$.

Dans ce cas, A' est unique et est notée A^{-1}.

Proposition 4.11. *Une matrice inversible est nécessairement carrée (mais la réciproque n'est pas vraie !).*

De plus, si $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ sont deux matrices de tailles n inversibles, alors A^{-1} et AB sont inversibles, et on a

$$(A^{-1})^{-1} \ , \ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

5. Rappels sur les systèmes linéaires

Si $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, elle définit une application linéaire

$$f_A \colon \begin{aligned} K^n &\longrightarrow K^m \\ X &\longmapsto AX, \end{aligned}$$

où X est un vecteur colonne de K^n.

On définit le noyau, l'image et le rang de A comme étant ceux de f_A.

En particulier, $\mathrm{Im}(A)$ est le sous-espace de K^n engendré par les colonnes de A, et le rang de A est la dimension de ce sous-espace.

Un système linéaire de m équations à n inconnues peut toujours se récrire sous la forme $AX = Y$, où $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K), X \in K^n$ et Y^m.

Par définition même, on a $X \in \ker(A)$ si et seulement si $X \in K^n$ est une solution du système $AX = 0$, et $Y \in \mathrm{Im}(A)$ si et seulement si le système $AX = Y$ admet au moins une solution (tout simplement parce que, par définition du produit matriciel, le vecteur AX est $x_1C_1 + \cdots + x_nC_n$, où $C_1, \ldots, C_n$ sont les colonnes de A et $x_1, \ldots, x_n$ sont les coordonnées de X).

Si $L_1, \ldots, L_m$ sont les lignes du système, grâce à des opérations élémentaires du type $L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$ pour tout $j \neq i$ (avec $\lambda \in K$), $L_i \leftarrow \lambda L_i, \lambda \in K^\times$, et des échanges de lignes, et après éventuellement une permutation des variables, on peut toujours transformer ce système linéaire en un système triangulaire, dont les dernières lignes ne contiennent éventuellement plus aucune variable.

Les variables apparaissant en premier dans chaque ligne avec un coefficient non nul sont appelés les **variables pivots**. Ce sont celles que l'on élimine successivement pour triangulariser le système. Le nombre de variables pivots r du système est égal au rang de A, i.e. la dimension de $\mathrm{Im}(A)$ (le sous-espace de K^m engendré par les colonnes de A). La dimension du noyau $\ker(A)$, i.e. le sous-espace de K^n formé des vecteurs $X \in K^n$ tels que $AX = 0$, est alors $n - r$.

Les variables pivots sont appelés aussi **variables liées**. Les autres variables sont dites **libres**. Les variables liées peuvent s'écrire en fonction des variables libres (d'où le nom...).

Théorème 5.1. *Si $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ sont les variables pivots, les colonnes $C_{j_1}, \ldots, C_{j_r}$ de A forment une base de* $\mathrm{Im}(A)$.

En particulier, r est le rang de A.

Dans le cas d'un système linéaire homogène $AX = 0$, les variables liées s'écrivent comment combinaisons linéaires des variables libres. En remplaçant dans X, on voit que l'ensemble des solutions du système $AX = 0$ est de la forme

$$\{x_{j_{r+1}}C'_1 + \cdots + x_{j_n}C'_{n-r}, x_{j_{r+1}}, \ldots, x_{j_n} \in K\},$$

où $C'_1, \ldots, C'_{n-r} \in K^n$ ne dépendent plus d'aucune variable, et où $x_{j_{r+1}}, \ldots, x_{j_n}$ sont les variables libres.

On peut d'ailleurs obtenir ces vecteurs en donnant successivement la valeur 1 à exactement une variable libre et la valeur 0 aux autres.

Théorème 5.2. *Les vecteurs* $C'_1, \dots, C'_{n-r}$ *forment une base de* $\ker(A)$.

Notons que les dernières lignes du système triangulaire sans variables (i.e. ne dépendant que plus que des coordonnées de Y) donnent des conditions de compatibilités sur les coordonnées de Y pour que le système ait au moins une solution. Plus précisément, l'ensemble de ces dernières lignes sans variables peut se récrire sous la forme $0 = BY$, avec $B \in \mathrm{M}_{m-r,m}(X)$. On a donc l'équivalence : $Y \in \mathrm{Im}(A) \iff BY = 0$ (i.e. $Y \in \ker(B)$, ce qui donne une description de $\mathrm{Im}(A)$ en termes d'équations).

Exemple 5.3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Le système linéaire général associé est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 & = & y_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 & = & y_2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 & = & y_3 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 & = & y_4 \end{array} \right.$$

En éliminant successivement x_3, x_4 puis x_2 (mais pour cette dernière, il n'y aura en fait rien à faire), et en réordonnant un peu, on obtient que ce système est équivalent au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_3 + x_2 + 3x_4 + x_2 + 2x_5 & = & y_1 \\ x_4 + x_2 + x_1 + x_5 & = & -y_1 + y_2 \\ x_2 + 2x_1 + 3x_5 & = & -y_1 + y_3 \\ 0 & = & 2y_1 - 3y_2 + y_4 \end{array} \right.$$

Notons que l'on réordonne uniquement pour voir apparaître le système triangulaire. Avec un peu d'habitude, on s'en passe très bien (il suffit de bien repérer les variables pivots choisies).

Ici, les variables liées sont x_3, x_4, x_2. Les variables libres sont x_1, x_5. Le théorème 5.1 nous dit que les colonnes $3, 4, 2$ de A forment alors une base de $\mathrm{Im}(A)$, i.e. une base de $\mathrm{Im}(A)$ est donnée par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La dernière ligne nous dit que le système $AX = Y$ possède une solution si et seulement si $2y_1 - 3y_2 + y_4 = 0$. Ainsi, on a

$$\mathrm{Im}(A) = \{Y \in K^4 \mid 2y_1 - 3y_2 + y_4 = 0\}.$$

En résolvant le système triangulaire $AX = 0$ (i.e. en écrivant les variables liées x_3, x_4, x_2 en fonction des variables libres x_1, x_5), on obtient

$$x_2 = -2x_1 - 3x_5, x_4 = x_1 - 2x_5, x_3 = -x_1 + 7x_5.$$

L'ensemble des vecteurs $X \in K^5$ vérifiant $AX = 0$, i.e. $\ker(A)$, est donc

$$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 - 3x_5 \\ -x_1 + 7x_5 \\ x_1 - 2x_5 \\ x_5 \end{pmatrix}, x_1, x_5 \in K \right\}.$$

Or, on a

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 - 3x_5 \\ -x_1 + 7x_5 \\ x_1 - 2x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ -x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3x_5 \\ 7x_5 \\ -2x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le théorème 5.2 nous dit alors qu'une base de $\ker(A)$ est donnée par

$$C'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Attention ! Le raisonnement précédent nous montre a priori seulement que C'_1, C'_2 engendrent $\ker(A)$. Néanmoins le théorème 5.2 nous assure que c'est bien une base (l'argument manquant est un argument de dimension, type théorème du rang, qui nous assure que la dimension de $\ker(A)$ est $n - r$. C'est d'ailleurs comme cela que l'on montre le théorème 5.2).

Évidemment, tout ceci dépend de la manière on résout le système. D'autres variables pivots amènent à d'autres résultats pour les bases et les équations définissant l'image.

Notons que si l'on applique cette méthode à l'équation définissant $\mathrm{Im}(A)$ (en prenant pour y_4 la variable pivot et y_1, y_2, y_3 les variables libres), on trouve une autre base de $\mathrm{Im}(A)$, à savoir

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Néanmoins, il n'y a pas de contradiction, puisque les w_i s'expriment en fonction des v_j et vice versa. On trouve très facilement par exemple que

$$v_1 = w_1 + w_2 + w_3,\ v_2 = 3w_1 + 4w_2 + 4w_3,\ v_3 = w_1 + 2w_2 + 3w_3,$$

et un peu plus péniblement en résolvant un système ou en inversant une matrice 3×3 (laquelle, d'ailleurs ?)

$$w_1 = 4v_1 - v_2,\ w_2 = -5v_1 + 2v_2 - v_3,\ w_3 = 2v_1 - v_2 - v_3.$$

6. Coordonnées, matrices représentatives, changements de base

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Si $x \in E$, il existe donc des scalaires, $x_1, \dots, x_n \in K$ **uniques** tels que

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

Les scalaires $x_1, \dots, x_n$ sont appelés les **coordonnées** de x dans la base $\mathscr{B}$. Le **vecteur des coordonnées** de x dans la base $\mathscr{B}$ est

$$[x]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Proposition 6.1. *Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.*

L'application $x \in E \longmapsto [x]_{\mathscr{B}} \in K^n$ est un isomorphisme de K-espaces vectoriels, d'inverse $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \longmapsto x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in E$.

C'est juste une autre façon de dire qu'une fois une base $\mathscr{B}$ fixée, un vecteur $x \in E$ est déterminé de manière unique par ses coordonnées, et qu'un vecteur de K^n correspond à un unique élément de E.

De plus, pour tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in K$, on a $[x + \lambda y]_{\mathscr{B}} = [x]_{\mathscr{B}} + \lambda [y]_{\mathscr{B}}$.

Attention ! Il ne faut pas confondre un vecteur $x \in E$ avec son vecteur des coordonnées. Par exemple, si $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$, alors le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **correspond** au polynôme $P = 3X^2 + 2X + 1$, mais ne lui est **pas** égal. Un élément de E est un polynôme, pas un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 6.2. *Soient $v_1, \dots, v_r \in E$ des vecteurs de E, et soit $P \in \mathrm{M}_{n \times r}(K)$ la matrice dont les colonnes sont $[v_1]_{\mathscr{B}}, \dots, [v_r]_{\mathscr{B}}$. Alors, les vecteurs $v_1, \dots, v_r$ sont linéairement indépendants si et seulement si P est de rang r.*

En particulier, une famille de n vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E si et seulement si la matrice P correspondante est inversible.

Le lemme suivant est fondamental, et son énoncé doit être parfaitement compris.

Lemme 6.3. *Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E, et soit $P \in \mathrm{M}_n(K)$ la matrice carrée dont les colonnes sont*

$$[e'_1]_{\mathscr{B}}, \dots, [e'_n]_{\mathscr{B}}$$

(autrement dit, on écrit les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathscr{B}'$ dans l'ancienne base $\mathscr{B}$).

Alors, P est inversible, et pour tout $x \in E$, on a

$$P[x]_{\mathscr{B}'} = [x]_{\mathscr{B}} \text{ et } P^{-1}[x]_{\mathscr{B}} = [x]_{\mathscr{B}'}.$$

Autrement dit, P permet de trouver les coordonnées d'un vecteur $x \in E$ dans l'ancienne base $\mathscr{B}$ si on connaît les coordonnées de x dans la nouvelle base $\mathscr{B}'$. En général, on veut plutôt faire le contraire, et il faut inverser P.

Pour ne pas se tromper, il faut se rappeler que $P[x]_{\mathscr{B}'}$ est une combinaison linéaire des colonnes de P. Or, les colonnes de P représentent des vecteurs de coordonnées dans la base $\mathscr{B}$!

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie, soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et soit $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_m)$ une base de F.

La **matrice représentative** de u dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ est la matrice dont les colonnes sont $[u(e_1)]_{\mathscr{C}}, \dots [u(e_n)]_{\mathscr{C}}$. Elle est notée $\mathrm{Mat}(u; \mathscr{B}, \mathscr{C})$ ou encore $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}(u)$. C'est une matrice de $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$.

Par définition, si $u(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$ pour tout $1 \leq j \leq n$, $\mathrm{Mat}(u; \mathscr{B}, \mathscr{C}) = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$.

Si $E = F$ (i.e. u est un endomorphisme de E) et $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, on la note simplement $\mathrm{Mat}(u; \mathscr{B})$ ou $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

Proposition 6.4. *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie, soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et soit $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_m)$ une base de F. Soit $M = \mathrm{Mat}(u; \mathscr{B}, \mathscr{C}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Alors on a*

$$[f(x)]_{\mathscr{C}} = M[x]_{\mathscr{B}} \text{ pour tout } x \in E.$$

De plus, $\mathrm{Mat}(u; \mathscr{B}, \mathscr{C})$ est l'unique matrice $M \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ vérifiant la propriété ci-dessus.

Remarque 6.5. Notons que par définition (avec les notations précédentes), pour tout $x \in E$, on a $x \in \ker(u)$ si et seulement si $[x]_{\mathscr{B}} \in \ker(\mathrm{Mat}(u; \mathscr{B}, \mathscr{C}))$, et pour tout $y \in F$, on a $y \in \mathrm{Im}(u)$ si et seulement si $[y]_{\mathscr{C}} \in \mathrm{Im}(\mathrm{Mat}(u; \mathscr{B}, \mathscr{C}))$.

Déterminer $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ revient donc à calculer le noyau et l'image d'une matrice représentative, en utilisant la théorie des systèmes linéaires.

Attention ! Une fois que l'on a trouvé le noyau et l'image d'une matrice représentative, il ne faut pas oublier de retraduire en termes d'éléments de E et F.

Théorème 6.6. *Soient E, F deux espaces vectoriels, soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et soit $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_m)$ une base de F.*

Alors, l'application $u \in \mathscr{L}(E, F) \longmapsto \mathrm{Mat}(u; \mathscr{B}, \mathscr{C}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, d'inverse $M \in \mathrm{M}_{m\times n}(K) \longmapsto u_M \in$

$\mathscr{L}(E,F)$, où $u_M : E \longrightarrow F$ est l'unique application linéaire telle que

$$[u(x)]_{\mathscr{C}} = M[x]_{\mathscr{B}} \quad \textit{pour tout } x \in E.$$

Autrement dit, si $M = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, on a

$$u_M(\sum_{j=1}^{n} x_n e_n) = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j))f_i, \ \textit{ et } \mathrm{Mat}(u_M;\mathscr{B},\mathscr{C}) = M.$$

Notons que le théorème précédent dit entre autres qu'une fois une base de E et une base de F fixées, une application linéaire est uniquement déterminée par sa matrice représentative, et que, réciproquement, une matrice M représente un unique endomorphisme dont elle est alors la matrice représentative dans les bases choisies.

De plus, on a $\mathrm{Mat}(u_1+\lambda u_2;\mathscr{B},\mathscr{C}) = \mathrm{Mat}(u_1;\mathscr{B},\mathscr{C}) + \lambda\,\mathrm{Mat}(u_2;\mathscr{B},\mathscr{C})$ pour tous $u_1, u_2 \in \mathscr{L}(E,F)$ et tout $\lambda \in K$.

Remarque 6.7. La description de u_M devient très simple lorsque $E = K^n$ et $F = K^m$, et lorsque l'on prend pour $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ les bases canoniques respectives. Dans ce cas, u_M est simplement définie par $u_M((x_1,\dots,x_n)) = M\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$ pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in K^n$, et la matrice représentative de u_M dans les bases canoniques est M.

Néanmoins, on ne peut pas se passer du théorème général, car il arrive souvent que l'on travaille avec autre chose que K^n.

On a aussi de bonnes propriétés vis-à-vis de la composition.

Proposition 6.8. *Soient E, F, G des espaces vectoriels, et soient $\mathscr{B},\mathscr{C},\mathscr{D}$ des bases de E, F, G respectivement. Enfin, soient $u : E \longrightarrow F$ et $v : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires. Alors,*

$$\mathrm{Mat}(v\circ u;\mathscr{B},\mathscr{D}) = \mathrm{Mat}(v;\mathscr{C},\mathscr{D})\,\mathrm{Mat}(u;\mathscr{B},\mathscr{C}).$$

De plus, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) *u est un isomorphisme*

(2) *il existe une matrice représentative de u qui est inversible*

(3) *toute matrice représentative de u est inversible.*

Rappelons aussi à toutes fins utiles, le théorème du rang.

Théorème 6.9. *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors,*

$$\dim_K(\ker(f)) + \dim_K(\mathrm{Im}(f)) = \dim_K(E).$$

De plus, le rang de u (i.e. la dimension de son image) est le rang de n'importe quelle matrice représentative de u.

On a la proposition **fondamentale** suivante.

Proposition 6.10. *Soit $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E, et soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n), \mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E. Soit P la matrice dont les colonnes sont $[e'_1]_{\mathscr{B}}, \ldots, [e'_n]_{\mathscr{B}}$. Alors, on a*

$$\operatorname{Mat}(u; \mathscr{B}') = P^{-1} \operatorname{Mat}(u; \mathscr{B}) P.$$

Pour se rappeler où est placé P et où est placé P^{-1} sans se tromper, il faut se souvenir que pour multiplier par $\operatorname{Mat}(u; \mathscr{B}')$, il faut partir d'un vecteur $x \in E$ écrit dans la base $\mathscr{B}'$ (afin d'obtenir les coordonnées de $u(x)$ dans $\mathscr{B}'$). Mais alors, on n'a pas le choix ! La matrice tout à droite doit être nécessairement P, car lorsque l'on multiplie par P, il faut partir également d'un vecteur écrit dans la base $\mathscr{B}'$ (On passe de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$).

On peut aussi faire le raisonnement suivant : $\operatorname{Mat}(u; \mathscr{B}')[x]_{\mathscr{B}'}$ donne les coordonnées de $u(x)$ dans la base $\mathscr{B}'$. Mais on peut aussi obtenir ces coordonnées en écrivant x dans la base $\mathscr{B}$, ce qui revient à calculer $P[x]_{\mathscr{B}'}$, puis on applique $\operatorname{Mat}(u; \mathscr{B})$ pour obtenir alors les coordonnées de $u(x)$ dans la base $\mathscr{B}$ et enfin, on obtient les coordonnées de $u(x)$ dans la base $\mathscr{B}'$ en appliquant P^{-1}.

Définition 6.11. Deux matrices $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ sont *semblables* s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ telle que $P^{-1}AP = B$.

Deux endomorphismes $f, g \in \mathscr{L}(E)$ d'un K-espace vectoriel E sont semblables s'il existe un automorphisme $\varphi \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi = g$.

Lemme 6.12. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) f et g sont semblables

(2) il existe une base $\mathscr{B}$ de E telles que $\operatorname{Mat}(f; \mathscr{B})$ *et* $\operatorname{Mat}(g; \mathscr{B})$ *soient semblables*

(3) pour toute base $\mathscr{B}$ de E, $\operatorname{Mat}(f; \mathscr{B})$ *et* $\operatorname{Mat}(g; \mathscr{B})$ *sont semblables*

(4) il existe deux bases $\mathscr{B}$et $\mathscr{B}'$ de E telles que $\operatorname{Mat}(f; \mathscr{B}) = \operatorname{Mat}(g; \mathscr{B}')$.

7. Déterminant

Définition 7.1. Soit E un K-espace vectoriel. Une *forme n-linéaire* sur E est une application

$$\varphi \colon \begin{array}{l} E \times \cdots \times E \longrightarrow K \\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \varphi(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

qui est linéaire en chaque variable.

Lorsque $n = 1$, on parle de *forme linéaire* sur E. Autrement dit, une forme linéaire est une application linéaire $f : E \longrightarrow K$.

On dit qu'une forme n-linéaire φ sur E est *symétrique* si

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varphi(x_1, \ldots, x_n), \quad \text{pour tous } x_1, \ldots, x_n \in E,\ \sigma \in \mathfrak{S}_n.$$

On dit qu'elle est *antisymétrique* si

$$\varphi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1,\dots,x_n)$$

pour tous $x_1,\dots,x_n \in E, \sigma \in \mathfrak{S}_n$, et *alternée* si

$$\text{pour tous } x_1,\dots,x_n \in E,\ x_i = x_j \text{ pour } i \neq j \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x_1,\dots,x_n) = 0.$$

Remarque 7.2. Si φ est alternée, alors elle est antisymétrique. Si $2 \neq 0_K$ dans K, la réciproque est vraie. C'est en particulier le cas si $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

En revanche, si $2 = 0_K \in K$, il existe des formes n-linéaires qui sont antisymétriques et non alternées.

Théorème 7.3. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Alors, le K-espace vectoriel $\mathrm{Alt}_n(E)$ des formes n-linéaires alternées est de dimension 1.*

Plus précisément, pour tout base $\mathbf{e} = (e_1,\dots,e_n)$ de E, il existe une unique forme n-linéaire alternée $\det_{\mathbf{e}}$ telle que

$$\det\nolimits_{\mathbf{e}}(e_1,\dots,e_n) = 1,$$

et elle engendre $\mathrm{Alt}_n(E)$. Si $x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$, on a

$$\det\nolimits_{\mathbf{e}}(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Définition 7.4. Soit E un K-espace de dimension n, soit $\mathbf{e}$ une base de E, et soient $x_1,\dots,x_n \in E$. Alors, $\det_{\mathbf{e}}(x_1,\dots,x_n)$ s'appelle le *déterminant* des vecteurs $x_1,\dots,x_n \in E$ par rapport à la base $\mathbf{e}$.

Théorème 7.5. *Soit E un K-espace de dimension $n \geq 1$, soit $\mathbf{e}$ une base de E, et soient $x_1,\dots,x_n \in E$. Alors, on a*

$$\begin{aligned} \det\nolimits_{\mathbf{e}}(x_1,\dots,x_n) \neq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (x_1,\dots,x_n) \text{ est libre} \\ &\Longleftrightarrow \quad (x_1,\dots,x_n) \text{ est une base de } E. \end{aligned}$$

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n, et soit $\mathbf{e}$ une base de E. Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, l'application

$$\begin{aligned} E\times\cdots\times E &\longrightarrow K \\ (x_1,\dots,x_n) &\longmapsto \det\nolimits_{\mathbf{e}}\big(u(x_1),\dots,u(x_n)\big) \end{aligned}$$

est n-linéaire alternée.

Il existe donc un **unique** élément $\det_{\mathbf{e}}(u) \in K$ tel que

$$\det\nolimits_{\mathbf{e}}\big(u(x_1),\dots,u(x_n)\big) = \det\nolimits_{\mathbf{e}}(u)\det\nolimits_{\mathbf{e}}(x_1,\dots,x_n)$$

pour tous $x_1,\dots,x_n \in E$. Autrement dit, on a

$$\det\nolimits_{\mathbf{e}}(u) = \det\nolimits_{\mathbf{e}}\big(u(e_1),\dots,u(e_n)\big).$$

Il suffit en effet d'appliquer l'égalité précédente à $(e_1,\dots,e_n)$ pour le voir.

Lemme 7.6. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et soit $\mathbf{e}$ une base de E. Alors, $\det_{\mathbf{e}}(u)$ est indépendant du choix de $\mathbf{e}$.*

Définition 7.7. Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Le *déterminant* d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$, noté $\det(u)$, est l'élément de K défini par

$$\det(u) = \det_{\mathbf{e}}(u) = \det_{\mathbf{e}}\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big),$$

où $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base arbitraire de E.

Proposition 7.8. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, soient u, $v \in \mathscr{L}(E)$, et soit $\lambda \in K$. Alors, on a les propriétés suivantes :*

(1) $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$;

(2) $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v) = \det(v \circ u)$;

(3) $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$;

(4) *on a* $\det(u) \neq 0$ *si, et seulement si,* $u \in \mathrm{GL}(E)$ *(i.e. u est un automorphisme). Dans ce cas,*

$$\det(u^{-1}) = \det(u)^{-1}.$$

Définition 7.9. Soit $M \in \mathrm{M}_n(K)$. Le *déterminant* de M est le déterminant de ses vecteurs colonnes par rapport à la base canonique de K^n. Il est noté $\det(M)$. C'est aussi le déterminant de l'endomorphisme

$$u\colon \begin{array}{rcl} K^n & \longrightarrow & K^n \\ X & \longmapsto & MX. \end{array}$$

Autrement dit, si $M = (a_{ij})$, on a

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Remarquons que, si E est un K-espace vectoriel de dimension finie, pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, on a

$$\det(u) = \det\big(\mathrm{Mat}(u\,;\mathbf{e})\big)$$

pour toute base $\mathbf{e}$ de E.

En particulier, $u \in \mathrm{SL}(E)$ si, et seulement si, $\mathrm{Mat}(u\,;\mathbf{e})$ est une matrice de déterminant 1.

On note $\mathrm{GL}_n(K)$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathrm{M}_n(K)$, et $\mathrm{SL}_n(K)$ l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_n(K)$ de déterminant 1. Ce sont des groupes pour la multiplication matricielle.

On dénotera dans la suite aussi par « det » l'application déterminant par rapport à la base canonique de K^n.

On a alors les propriétés suivantes.

Proposition 7.10. *Soit K un corps, et soit $n \geq 1$ un entier. Pour toutes matrices M, $N \in \mathrm{M}_n(K)$ et tout $\lambda \in K$, on a :*

(1) $\det(I_n) = 1$ *;*

(2) $\det(MN) = \det(M)\det(N) = \det(NM)$ *;*

(3) $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$ *;*

(4) *on a* $\det(M) \neq 0$ *si, et seulement si,* M *est inversible. Dans ce cas,*

$$\det(M^{-1}) = \det(M)^{-1}$$

Cette condition est aussi équivalente que les colonnes de M *forment une famille libre, resp. une base, de* K^n *;*

(5) $\det(M^t) = \det(M)$;

(6) *si deux colonnes/lignes de* M *sont identiques, alors* $\det(M) = 0$ *;*

(7) *si les colonnes/lignes de* M *sont liées, alors* $\det(M) = 0$ *;*

(8) *lorsqu'on échange deux colonnes/lignes de* M*, on multiplie la valeur du déterminant par* -1 *;*

(9) *lorsqu'on multiplie une colonne/ligne par* $\lambda \in K$*, on multiplie par* λ *la valeur du déterminant ;*

(10) *si* $C_1, \ldots, C_n$ *sont les colonnes de* M*, et si* $L_1, \ldots, L_n$ *sont les lignes de* M*, alors pour tous* $i, j \in [\![1, n]\!]$ *, où* $i \neq j$*, et pour tout* $\lambda \in K$*, les opérations*

$$C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j, L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$$

ne changent pas la valeur du déterminant.

Exemple 7.11. Pour tous a, b, c, $d \in K$, on a

$$\det(a) = a \quad \text{et} \quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Les propriétés précédentes sont fort utiles pour calculer le déterminant d'une matrice sur les lignes et les colonnes. Nous allons en donner une autre, qui permet de réduire le calcul du déterminant d'une matrice à celui de matrices de tailles inférieure. On a tout d'abord besoin d'une définition.

Définition 7.12. Soit $M \in \mathrm{M}_n(K)$. Pour tous i, $j \in [\![1, n]\!]$, on note $\Delta_{ij}(M)$ le déterminant de la sous-matrice de M obtenue en enlevant la ligne i et la colonne j. L'élément $\Delta_{ij}(M)$ s'appelle un *mineur* de M.

Proposition 7.13. *Soit* $M = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$*. Alors :*

(1) *pour tout* $j \in [\![1, n]\!]$*, on a* $\det(M) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}(M)$ (Développement par rapport à la colonne j) *;*

(2) *pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$*, on a* $\det(M) = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}(M)$ (Développement par rapport à la ligne i)*.*

Définition 7.14. Si $M \in \mathrm{M}_n(K)$, la *comatrice* de M est la matrice

$$\mathrm{com}(M) = \big((-1)^{i+j}\Delta_{ij}(M)\big) \in \mathrm{M}_n(K).$$

Proposition 7.15. *Pour tout* $M \in \mathrm{M}_n(K)$*, on a*

$$M\,\mathrm{com}(M)^t = \mathrm{com}(M)^t M = \det(M) I_n.$$

En particulier, si M *est inversible, on a*

$$M^{-1} = \big(\det(M)\big)^{-1} \mathrm{com}(M)^t.$$

Démonstration. Le terme général c_{ij} de la matrice $\mathrm{com}(M)^tM$ est

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} \Delta_{ki}(M) a_{kj}.$$

La proposition précédente montre que $c_{ii} = \det(M)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Supposons maintenant que $i \neq j$, et considérons $M' = (b_{ij})$ la matrice obtenue de M en remplaçant la colonne i par la colonne j.

Puisque M' possède deux colonnes identiques, on a $\det(M') = 0$. Mais en développant ce déterminant par rapport à la colonne i, on obtient

$$\det(M') = 0 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} b_{ki} \Delta_{ki}(M').$$

Or, par construction de M', on a $\Delta_{ki}(M') = \Delta_{ki}(M)$ et $b_{ki} = a_{kj}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Ainsi, on obtient

$$0 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \Delta_{ki}(M) = c_{ij}.$$

Ainsi, on obtient $c_{ij} = \det(M)\delta_{ij}$, et donc

$$\mathrm{com}(M)^t M = \det(M) I_n.$$

L'autre égalité se montre de la manière analogue. Le dernier point est clair, puisque M est inversible si, et seulement si, $\det(M) \neq 0$. □

Nous continuons ce paragraphe en calculant le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Proposition 7.16. *Soit $M = (M_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) par blocs, c'est-à-dire $M_{ij} = 0$ pour tout $i > j$ (resp. $i < j$). Alors, on a*

$$\det(M) = \det(M_{11}) \cdots \det(M_{nn}).$$

En particulier, si $M = (a_{ij})$ est une matrice triangulaire, on a

$$\det(M) = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

Remarque 7.17. Pour calculer le déterminant d'une matrice M, on a intérêt à effectuer des opérations sur les lignes et les colonnes et ainsi faire apparaître un maximum de 0 afin, soit de rendre la matrice M triangulaire (grâce à la méthode du pivot de Gauss), soit de développer par rapport à une ligne ou une colonne bien choisie pour se ramener au calcul du déterminant d'une matrice de plus petite taille.

8. Retour sur le rang d'une matrice

Définition 8.1. Deux matrices $A, B \in \mathrm{M}_{m \times n}(K)$ sont *équivalentes* s'il existe deux matrices P, Q inversibles de taille m et n respectivement telles ques $A = PBQ$.

La relation « être équivalentes » est une relation d'équivalence.

Théorème 8.2. *Toute matrice $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ est équivalente à une matrice par blocs de la forme* $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, *où* $0 \leq r \leq \min(m,n)$.

De plus, r est unique et est égal à $\mathrm{rg}(A)$.

En particulier, deux matrices de $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

Enfin, $\mathrm{rg}(A^t) = \mathrm{rg}(A)$ *(le rang des lignes est égal au rang des colonnes).*

Définition 8.3. Soit $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Une matrice *extraite* de A (ou *sous-matrice*) est une matrice obtenue en ne gardant que certaines lignes et certaines colonnes de A.

Un *mineur d'ordre* r de A est le déterminant d'une matrice extraite de A de taille r.

Théorème 8.4. *Soit $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Alors :*

(1) Pour tout $r \geq 1$, on a $\mathrm{rg}(A) < r$ *si et seulement si tous les mineurs de A de taille $r+1$ sont nuls*

(2) Pour tout $r \geq 1$, on a $\mathrm{rg}(A) \geq r$ *si et seulement s'il existe au moins un mineur de A de taille r non nul*

(3) $\mathrm{rg}(A)$ *est la taille maximale d'un mineur de A non nul.*

9. Polynômes d'endomorphismes

Soit E un K-espace vectoriel, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.

Si $n \geq 0$, on note $u^n = u \circ \cdots \circ u$ (où on compose u n fois avec lui même), avec la convention $u^0 = \mathrm{Id}_E$.

Si $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in K[X]$, on note $P(u) = a_n u^n + \cdots + a_1 u + a_0 \,\mathrm{Id}_E$.

Proposition 9.1. *Pour tous $P, Q \in K[X]$, et tout $\lambda \in K$, on a :*

(1) $1(u) = \mathrm{Id}_E$

(2) $(P + \lambda Q)(u) = P(u) + \lambda Q(u)$

(3) $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$

Définition 9.2. On dit que P **annule** u, ou que P est un **polynôme annulateur** de u si $P(u) = 0 \in \mathscr{L}(E)$.

Lemme 9.3. *On suppose que E est de dimension finie. Alors, il existe au moins un polynôme annulateur non nul de u. De plus, il existe un* **unique** *polynôme annulateur unitaire de degré minimal μ_u.*

De plus, pour tout $P \in K[X]$, on a $P(u) = 0$ si et seulement si $\mu_u \mid P$.

Définition 9.4. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Le polynôme μ_u s'appelle le **polynôme minimal** de u.

Définition 9.5. Si M est une matrice représentative de u dans une base arbitraire fixée, le déterminant de la matrice $XI_n - M$ est un élément de

$K[X]$, et est indépendant de la base choisie. Ce polynôme est appelé **polynôme caractéristique** de u, et est noté χ_u. Il est unitaire et de degré $n = \dim_K(E)$. Son terme constant est $(-1)^n \det(u)$.

Théorème 9.6 (Cayley-Hamilton)**.** *Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, on a $\chi_u(u) = 0$.*

Autrement dit, $\mu_u \mid \chi_u$.

Remarque 9.7. On a une notion de polynôme en une matrice A, polynôme caractéristique, polynôme minimal d'une matrice A. On montre qu'elles coïncident alors avec les notions définies ci-dessous pour l'endomorphisme $f_A : K^n \longrightarrow K^n$.

Lemme 9.8. *Deux matrices/endomorphismes semblables ont même polynôme caractéristique.*

10. Réduction des endomorphismes

Faisons tout d'abord de brefs rappels sur les racines d'un polynôme.

Définition 10.1. Si $P \in K[X]$, on dit que $\lambda \in K$ est une *racine* de P (ou un *zéro* de P) si $P(\lambda) = 0$.

Lemme 10.2. *Pour tout $\lambda \in K$, on a $P(\lambda) = 0$ si et seulement si P est un multiple de $X - \lambda$.*

De plus, un polynôme **non nul** *de degré d possède au plus d racines dans K.*

Définition 10.3. Si $\lambda \in K$ est une racine de P, la *multiplicité* de λ est le plus grand entier $m \geq 1$ tel que $(X - \lambda)^m$ divise P. On dit que λ est une racine *simple* si sa multiplicité est 1, et est une racine *multiple* si sa multiplicité est ≥ 2.

On dit qu'un polynôme $P \in K[X]$ de degré d est *scindé* sur K s'il possède d racines dans K (comptées avec multiplicité), i.e. s'il est produit de facteurs de degré 1.

Définition 10.4. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.

Une *valeur propre* de u est un scalaire $\lambda \in K$ tel qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ vérifiant $u(x) = \lambda x$. Un tel vecteur x est appelé un *vecteur propre* de u associé à la valeur propre λ.

Attention ! Une valeur propre est un élément de K, et un vecteur propre est non nul.

On dit que u est *diagonalisable* (sur K) s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E formée de vecteurs propres de u.

Pour une telle base, $\mathrm{Mat}(u; \mathscr{B})$ est une matrice *diagonale*, et les éléments diagonaux sont les valeurs propres de u. Inversement, si $\mathscr{B}$ est une base dans laquelle $\mathrm{Mat}(u; \mathscr{B})$ est diagonale, cette base $\mathscr{B}$ est bien entendu formée de vecteurs propres et u est diagonalisable.

L'ensemble des valeurs propres de u est appelé le *spectre* de u, et est noté $\mathrm{Sp}_K(u)$ (il peut être vide !). On rappelle que $\lambda \in K$ est une valeur propre de u si et seulement si $\chi_u(\lambda) = 0$.

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}_K(u)$, le *sous-espace propre* associé à λ est le sous-espace $E_\lambda = \ker(u - \lambda \,\mathrm{Id}_E)$. C'est l'ensemble formé du vecteur nul et des vecteurs propres de u associé à λ.

Si λ est une valeur propre de u, on note m_λ sa multiplicité dans χ_u. On peut démontrer que $\dim_K(E_\lambda) \leq m_\lambda$.

On a alors le théorème suivant.

Théorème 10.5. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.*

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) *u est diagonalisable*

(2) *E est la somme directe des sous-espaces propres de u*

(3) *χ_u est scindé sur K, et pour toute valeur propre λ de u,* $\dim_K(E_\lambda) = m_\lambda$

(4) *Il existe un polynôme annulateur P de u scindé sans racines multiples. Dans ce cas,* $\mathrm{Sp}_K(u)$ *est contenu dans l'ensemble des racines de P ;*

(5) *Le polynôme* $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}_K(u)} (X - \lambda)$ *annule u*

(6) $\mu_u = \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}_K(u)} (X - \lambda)$

(7) *μ_u est scindé sans racines multiples.*

Remarque 10.6. Le critère le plus utile pour démontrer la diagonalisabilité de u est certainement le point (4), car il ne présuppose pas de savoir calculer les valeurs propres. En revanche, il ne donne pas un moyen de trouver une base de vecteurs propres. Si l'on veut une telle base, il est indispensable de déterminer une base de chaque sous-espace propre, en résolvant des systèmes linéaires, puis de recoller les bases pour obtenir une base de E formée de vecteurs propres.

Pour démontrer qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ n'est **pas** diagonalisable, on dispose de quelques méthodes. Soit on met en défaut le point (3) en calculant la dimension des sous-espaces propres et en comparant avec les multiplicités des valeurs propres, soit on montre que μ_u n'est pas scindé à racines simples, soit on montre que le polynôme $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}_K(u)} (X - \lambda)$ n'annule pas u.

Définition 10.7. Un endomorphisme u de E est dit *trigonalisable* s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u; \mathscr{B})$ soit triangulaire supérieure.

On a alors le théorème suivant.

Théorème 10.8. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) *u est trigonalisable*

(2) *Il existe des sous-espaces vectoriels* $E_1, \ldots, E_r$ *de* E *vérifiant les conditions suivantes :*

(i) pour tout $i = 1, \ldots, r$, E_i *est stable par* u, *i.e.* $u(E_i) \subset E_i$

(ii) pour tout $i = 1, \ldots, r$, $\dim(E_i) = i$ *(et donc nécessairement* $E_n = E$*)*

(iii) $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n$

(3) χ_u *est scindé sur* K.

En particulier, le théorème de d'Alembert nous assure que lorsque $K = \mathbb{C}$, tout endomorphisme u est trigonalisable.

Définition 10.9. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est *nilpotent* s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $u^k = 0$.

Théorème 10.10 (Décomposition de Dunford)**.** *Soit* E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie* $n \geq 1$, *et soit* $u \in \mathscr{L}(E)$ *un endomorphisme de* E. *On suppose que* χ_u *est scindé sur* K. *Alors, il existe deux endomorphismes* δ *et* ν *satisfaisant aux propriétés suivantes :*

(1) δ *est diagonalisable et* ν *est nilpotent*

(2) $\delta \circ \nu = \nu \circ \delta$

(3) $u = \delta + \nu$.

De plus, δ *et* ν *sont uniques, et sont des polynômes en* u.

Remarque 10.11. On a bien sûr la version matricielle de cette décomposition.